Université Paris-Diderot | Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II | L1 MASS-2

Dévoir surveillé 2 : corrigé

8 avril 2014

Question du cours.
Soit $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $p'(x)$ sa dérivée et $p''(x)$ la deuxième dérivée.
Donner une condition pour que $a \in \mathbb{R}$ soit une racine double de $p(x)$.

Reponse. Une condition nécessaire et suffisante est que

$$p(a) = p'(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad p''(a) \neq 0.$$

C'est à dire, a es une racine de $p(x)$ et de sa dérivée $p'(x)$, mais a n'est pas une racine de $p''(x)$.

Exercice 1.

(a) Donner le développement limité en 0 de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ à ordre 5.

(b) En utilisant que $x^3 \cotan(x) = \frac{x^3 \cos(x)}{\sin(x)}$, donner le développement limité de $x^3 \cotan(x)$ en 0 à l'ordre 6.

Considérer la courbe

$$\gamma(t) = \left(t \ln\left(\frac{1}{1-t} \right), t^3 \cotan(t) \right).$$

(c) Étudier le domaine de définition de γ.

(d) Quel est le comportement de la courbe près de $t = 1$?

(e) Montrer que $t = 0$ est un point singulier. Quel est son type ?

Reponse.

(a) On rappelle que les dérivées de $\sin(x)$ sont données par

$$\sin^{(1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(3)}(x) = -\cos(x), \quad \sin^{(4+h)}(x) = \sin^{(h)}(x) \;\forall\, h \geq 0.$$

Comme $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$, on obtient le DL à l'ordre 5 pour $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Analoguement, pour le $\cos(x)$ on obtient

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

(b) Il faut déterminer le DL à l'ordre 6 de $\frac{x^3\cos(x)}{\sin(x)}$. En utilisant les DL obtenus au point (a), on obtient

$$\frac{x^3\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{x^3\big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\big)}{x\big(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^5)\big)} = \frac{x^2\big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\big)}{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^5)}.$$

Dénotons maintenant $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)$. Notons que si x tends vers 0, alors y tends vers 0. En utilisant le DL (à l'ordre 2)

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + o(y^2),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^5)}\\
&= 1 + \Big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)\Big) + \Big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)\Big)^2 + o\Big(\Big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)\Big)^2\Big)\\
&= 1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{36}x^4 + o(x^5)\\
&= 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2\big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\big)}{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^5)} &= x^2\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\Big)\Big(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5)\Big)\\
&= x^2\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{7}{360}x^4 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big)\\
&= x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^7),
\end{aligned}$$

qui est donc le DL à l'ordre 6 de $\frac{x^3\cos(x)}{\sin(x)}$.

(c) Écrivons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Alors le domaine de définition de γ est donné par

$$\mathcal{D}_\gamma = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y,$$

où $\mathcal{D}_x$ est le domaine de la première coordonnée, et $\mathcal{D}_y$ le domaine de la deuxième coordonnée. Pour $x(t) = tln\frac{1}{1-t}$, on a les conditions

$$\frac{1}{1-t} > 0 \qquad \text{et} \qquad 1-t \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{D}_x = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 1\} = \ ]-\infty, 1[$.
Pour $y(t) = t^3\operatorname{cotan}(t)$, la cotangente est bien définie sauf si $t = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent,

$$\mathcal{D}_\gamma = \ ]-\infty, 1[\ \cap (\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}) = \ \{t < 1 \mid t \neq -k\pi, k \in \mathbb{N}\}.$$

(d) On prend

$$x(t) = t\ln\Big(\frac{1}{1-t}\Big) \qquad \text{et} \qquad y(t) = t^3\cdot\operatorname{cotan}(t).$$

On obsèrve que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1^-} x(t) &= \lim_{t\to 1^-} t\ln\Big(\frac{1}{1-t}\Big) = +\infty\\
\lim_{t\to 1^-} y(t) &= \lim_{t\to 1^-} t^3\cdot\operatorname{cotan}(t) = \operatorname{cotan}(1) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

D'où nous avons une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{\pi}{4}$ quand $t \to 1^-$.

(e) À priori, le point 0 n'appartient pas au domaine de γ : $0 \notin \mathcal{D}_\gamma$, par le point (c). On montrera que on peut étendre par continuité cette courbe en 0. Le point 0 alors sera singulier si (par définition) $\gamma'(0) = (0,0)$.

Pour étudier ces questions, et le type de point singulier en 0, on va considerer le DL de $x(t)$ et $y(t)$ en 0. Le DL de $y(t)$ en 0 est donné par le point (b). Le fait que $\lim_t \to 0 y(t) = 0 \in \mathbb{R}$ nous dit qu'on peut étendre γ par continuité en 0 (on savait déjà que $0 \in \mathcal{D}_x$).

Pour le DL de $x(t)$, on a

$$x(t) = t\ln\big((1-t)^{-1}\big) = -t\ln(1-t) = -t\big(-t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)\big) = t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + o(t^4),$$

et donc $x'(0) = 0$. Comme

$$y(t) = t^2 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{45}t^6 + o(t^7),$$

on a en particulier que $y'(0) = 0$, et 0 est un point singulier.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, soient x_k et y_k réspectivement les coefficients de degré k du DL de $x(t)$ et $y(t)$ en 0. Pour déterminer le type de point singulier, il faut trouver $1 \leq m$ la plus petite valeure telle que $(x_m, y_m) \neq (0,0)$, et $n > m$ le plus petit possible tel que (x_m, y_m) et (x_n, y_n) forment une base de $\mathbb{R}^2$. Dans notre cas, on a :

$$\begin{array}{lllll} x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = \frac{1}{2}, & x_4 = \frac{1}{3}, & \text{etc.} \\ y_1 = 0, & y_2 = 1, & y_3 = 0, & y_4 = -\frac{1}{3}, & \text{etc.} \end{array}$$

Donc $m = 2$, avec $(x_2, y_2) = (1,1)$, et $n = 3$, avec $(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, 0)$.

Par conséquent on a un rebroussement de première espèce.

Exercice 2. *Soit*

$$f(x) = x\cosh(x) - \sinh(x), \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer les dérivées de f jusqu'à l'ordre 4.

(b) Montrer que $f^{(5)}(x) = x\sinh(x) + 4\cosh(x)$.

(c) Énoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4.

(d) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$\frac{x^3}{3} \leq x\cosh(x) - \sinh(x) \leq \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

*(*Indication : utiliser que $5e + \frac{3}{e} < 16$.*)*

Reponse.

(a) En rappellant que $\sinh'(x) = \cosh'(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh'(x)$, on calcule les dérivées :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cosh(x) + x\sinh(x) - \cosh(x) = x\sinh(x) \\ f''(x) &= \sinh(x) + x\cosh(x) \\ f'''(x) &= \cosh(x) + \cosh(x) + x\sinh(x) = x\sinh(x) + 2\cosh(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sinh(x) + x\cosh(x) + 2\sinh(x) = x\cosh(x) + 3\sinh(x). \end{aligned}$$

(b) De la question précedente on a directement que

$$f^{(5)}(x) = \cosh(x) + x\sinh(x) + 3\cosh(x) = x\sinh(x) + 4\cosh(x).$$

(c) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 nous dit que

$$f(x) \quad = \quad f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4 + R_4(x)$$

où il existe ξ entre 0 et x tel que

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5.$$

Rappellons que

$$\cosh(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = 1, \qquad \sinh(0) = \frac{e^0-e^0}{2} = 0.$$

Donc dans notre cas, on a que

$$\begin{aligned} f(0) &= 0\cdot\cosh(0) - \sinh(0) = 0,\\ f'(0) &= 0\sinh(0) = 0,\\ f''(0) &= 0\cdot\cosh(0) + \sinh(0) = 0,\\ f'''(0) &= 0\cdot\sinh(0) + 2\cosh(0) = 2,\\ f^{(4)}(0) &= 0\cdot\cosh(0) + 3\sinh(0) = 0. \end{aligned}$$

On obtient

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + R_4(x),$$

où il existe ξ entre 0 et x tel que

$$R_4(x) = \tfrac{\xi\sinh(\xi)+4\cosh(\xi)}{120}\,x^5.$$

(d) D'après la question précedente, on doit borner $\xi\sinh(\xi) + 4\cosh(\xi)$ avec $\xi \in \,]0,x[\, \subset [0,1]$.
Les fonctions $\sinh(x)$, x et $\cosh(x)$ sont (strictement) croissantes pour $x \geq 0$, donc aussi $f^{(5)}(x) = x\sinh(x) + 4\cosh(x)$ l'est.
Il s'en suit que, pour $0 \leq \xi \leq 1$, on a l'encadrement suivant :

$$f^{(5)}(0) \leq f^{(5)}(\xi) \leq f^{(5)}(1).$$

Notons que

$$f^{(5)}(0) = 4 > 0, \qquad f^{(5)}(1) = 1\cdot\sinh(1) + 4\cdot\cosh(1) = \frac{1}{2}\big(e - e^{-1} + 4e + 4e^{-1}\big) = \frac{1}{2}\big(5e + 3e^{-1}\big) < 8,$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé l'indication de l'exercice.
Pour $R_4(x)$, on obtient donc

$$0 \leq \frac{4}{120}x^5 \leq R_4(x) \leq \frac{8}{120}x^5 = \frac{1}{15}x^5,$$

d'où l'encadrement voulu.